Задание № 20 Комплексные числа в алгебраической форме

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

Определение: Полагаем . Это число  называется *мнимой единицей*.

Из определения очевидно, что 

Определение: Число , где  - действительные числа, называется *комплексным числом*. При этом действительное число  называется *действительной частью* числа  и обозначается ; действительное число  называется *мнимой частью* числа  и обозначается .

Запись комплексного числа виде  называют *алгебраической формой* комплексного числа.

При  комплексные числа называются *мнимыми.*

Определение: Два комплексных числа ,  считаются равными, если  и .

Комплексное число  равно нулю, если .

Комплексные числа  и  называются противоположными, если .

Определение: Комплексное число называется числом, *комплексно сопряженным* с числом .

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел  и определяются следующими правилами:







т.е. при сложении, вычитании и умножении скобки раскрываются по обычным правилам, учитывается условие  и приводятся подобные.



При делении необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное к знаменателю, раскрыть скобки и привести подобные.

*Пример*: Если , , то

,

, ,





**Решение алгебраических уравнений с использованием комплексных чисел**

Алгебраическое уравнение вида  с комплексными (в частности – с действительными) коэффициентами любой целой степени  всегда имеет  комплексных корней (среди которых могут быть и одинаковые).

Если в уравнении  все коэффициенты действительные и уравнение имеет корень  при , то комплексно сопряженное число  также является корнем этого уравнения.

Полное квадратное уравнение  имеет два корня

, где  - дискриминант, ,  - корни квадратного уравнения.

Квадратное уравнение всегда имеет два корня. Если коэффициенты  - действительные числа, то:

1. при  корни ,  - различные действительные числа;
2. при  корни ,  - равные действительные числа;
3. при  уравнение не имеет действительных корней. Корни такого уравнения – сопряженные комплексные числа

В высшей математике обычно используют приведенное квадратное уравнение вида . Уравнение  легко приводится к виду :

.

Если корни ,  уравнения  известны, то .

Для проверки правильности нахождения корней используют формулы Виета: ;  или ; .

*Пример 1:* Решить уравнение 

Первый способ:



Второй способ (способ выделения полного квадрата):

В этом способе постоянный коэффициент разделяют на два слагаемых  таким образом, чтобы одно из слагаемых и члены, содержащие  и , образовывали полный квадрат . После выделения полного квадрата уравнение можно представить в виде ; 

*Пример 2:* Решить уравнение 

. 

Любой многочлен второй степени можно представить в виде произведения двух многочленов первой степени.

Так, в примере 1:

, а в примере 2:



В дальнейшем удобно будет считать, что многочлен степени  имеет ровно  комплексных корней (среди которых могут быть и одинаковые).

Определение: если уравнение имеет k одинаковых корней , то говорят, что корень имеет *кратность* k.

*Пример3:* Найти все корни многочлена 

*Решение:* 

Выражение  равно 0 тогда, когда равен нулю хотя бы один из сомножителей, т.е.  или  или  или  или . Значит, уравнение имеет 5 корней: , .

**Самостоятельная работа:**

1.1.1. Для данных комплексных чисел найти сумму, обе разности, произведение и оба частных

а) , ; б) , ;

в) , ; г) , ;

д) , ; е) , ;

**1.1.2.** Даны комплексные числа , .

Найти а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

**1.1.3.** Найти действительные числа  из комплексного уравнения ;

**1.1.4.** Решить квадратные уравнения а) ; б) ; в) ;

**1.1.5.** В предположении, что количество корней уравнения совпадает с его степенью (корни могут быть кратными), найти все корни уравнений

а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) ; е) ;

**Ответы:**

1.1.1. а) ; ; ; ; ; ; б) ;; ; ; ; ;

в) ; ; ; ; ; ; г) ; ; ; ; ; ;

д) ; ; ; ; ; ;

е) ; ; ; ; ; ;

**1.1.2.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; **1.1.3.** ;

**1.1.4.** а) ; б) ; в) ;

**1.1.5.** а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) ; е) ; ; ;